|  |  |
| --- | --- |
|  | D:\Dokumen Mocher\desktop\logo UMB.jpg |
|  | **MODUL PERKULIAHAN** |
|  |  |
|  | **TRIGONOMETRI**   * + Definisi perbandingan trigonometri   + Rumus-rumus trigonometri   + Grafik fungsi trigonometri   + Grafik fungsi trigonometri |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |  | |  | |  |
|  | **Fakultas** | | **Program Studi** | **Tatap Muka** | **Kode MK** | | **Disusun Oleh** | |  |
|  | Ilmu Komputer | | Sistem Informasi | **12** | **87005** | | Drs. Sapto Prayogo. M.Kom | |  |
| **Abstract** | | | | **Kompetensi** | |
|  | | | |  | |
| Lingkaran tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap. Jarak yang sama itu disebut jari-jari dan titik tetap itu disebut pusat lingkaran. | | | | Mahasiswa mampu mendiskripsikan dan mengaplikasikan perbandingan trigonometri, memahami penggunaan rumus-rumus trigonometri dan membuat grafik fungsi trigonometri | |

**TRIGONOMETRI**

Konsep trigonometri pada pembahasan ini diawali dengan perbandingan trigonometri suatu sudut pada segitiga siku−siku.

1. **Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga Siku-siku**

A

B

C

α

*c*

*a*

*b*

Gb. 12.1 Perbandingan Trigonometri

Gambar di atas adalah segitiga siku-siku dengan titik sudut sikunya di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah *a*, panjang sisi di hadapan sudut B adalah *b*, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah *c*.

Terhadap sudut α:

Sisi *a* disebut sisi siku-siku di depan sudut α

Sisi *b* disebut sisi siku-siku di dekat (berimpit) sudut α

Sisi *c* (sisi miring) disebut hipotenusa

Berdasarkan keterangan di atas, didefinisikan 6 (enam) perbandingan trigonometri terhadap sudut α sebagai berikut:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

Dari perbandingan tersebut dapat pula ditulis rumus:

 dan 

 dan 

Contoh:

A

B



C

α

*c*

*a*

*b*

Gb. 12.2. Perbandingan trigonometri

Pada gambar di samping segitiga siku−siku ABC dengan panjang *a* = 24 dan *c* = 25.

Tentukan keenam perbandingan trigonometri untuk α.

Penyelesaian:

Nilai *b* dihitung dengan teorema Pythagoras







 

 

 

1. **Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa**

Sudut istimewa adalah sudut yang perbandingan trigonometrinya dapat dicari tanpa memakai tabel matematika atau kalkulator, yaitu: 0°, 30°, 45°,60°, dan 90°.

Sudut-sudut istimewa yang akan dipelajari adalah 30°, 45°,dan 60°.

Untuk mencari nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa digunakan segitiga siku-siku

seperti gambar berikut ini.

Gb. 12.3.a. sudut istimewa



45°

1

1

Gb. 12.3b. sudut istimewa



60°

30°

1

2

Dari gambar 11.3a dapat ditentukan

 

 

 

Dari gambar 2.4.b dapat ditentukan

 

 

 

 

 

 

# **Tabel nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| sin α | 0 |  |  |  | 1 |
| cos α | 1 |  |  |  | 0 |
| tan α | 0 |  | 1 |  | tak terdefinisi |
| cot α | tak terdefinisi |  | 1 |  | 0 |

contoh:

1. 
2. 



1. **Perbandingan Trigonometri suatu Sudut di Berbagai Kuadran**

P (Gb. 11.4) adalah sembarang titik di kuadran I dengan koordinat (x,y). OP adalah garis yang dapat berputar terhadap titik asal O dalam koordinat kartesius, sehingga ∠XOP dapat bernilai : 0° sampai dengan 90°. Perlu diketahui bahwa

*y*

*x*

X

Y

P(*x,y*)

*r*

α1

Gb. 12.4

O

 dan *r* > 0

Berdasarkan gambar di atas keenam perbandingan trigonometri baku dapat didefinisikan dalam absis (*x*), ordinat (*y*), dan panjang OP (*r*) sebagai berikut:

1.  4. 
2.  5. 
3.  6. 

Dengan memutar garis OP maka ∠ XOP = α dapat terletak di kuadran I, kuadran II, kuadran III atau kuadran IV, seperti pada gambar di bawah ini.

Gb. 12.5 titik di berbagai kuadran

*y*

*x*

X

Y

P(*x,y*)

*r*

α1

O

*y*

*x*

X

Y

P(*x,y*)

*r*

α2

O

*y*

*x*

X

Y

*r*

P(*x,y*)

α3

O

*y*

*x*

X

Y

*r*

P(*x,y*)

α4

O

Tabel tanda nilai keenam perbandingan trigonometri di tiap kuadran:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Perbandingan  Trigonometri | Kuadran | | | |
| I | II | III | IV |
| sin | + | + | - | - |
| cos | + | - | - | + |
| tan | + | - | + | - |
| csc | + | + | - | - |
| sec | + | - | - | + |
| cot | + | - | + | - |

1. **Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi**

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut (90° ± α), (180° ± α), (360° ± α), dan -α°. Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut α° dengan (90° - α) dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut α° dengan (180° - α). Contoh: penyiku sudut 50° adalah 40°, pelurus sudut 110° adalah 70°.

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (90° - α)

*y*

*x*

X

Y

P(*x,y*)

*r*

α

(90-α)

P1(*x*1*,y*1)

*r*1

*x*1

*y*1

y = x

Gb. 12.6 sudut yang berelasi

O

Dari gambar 2.7 diketahui

Titik P1(*x*1*,y*1) bayangan dari P(*x,y*)

akibat pencerminan garis *y* = *x*, sehingga diperoleh:

a. ∠XOP = α dan ∠XOP1 = 90° - α

b. *x*1 = *x*, *y*1*= y* dan *r*1 = *r*

Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh:

* 1. 
  2. 
  3. 

Dari perhitungan tersebut maka rumus perbandingan trigonometri sudut α dengan (90° - α) dapat dituliskan sebagai berikut:

a.  d. 

b.  e. 

c.  f. 

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan (180° - α)

Titik P1(*x*1*,y*1) adalah bayangan dari titik P(*x,y*) akibat pencerminan terhadap sumbu y, sehingga

*y*

*x*

X

Y

P(*x,y*)

*r*

α

(180°-α)

P1(*x*1*,y*1)

*r*1

*x*1

*y*1

O

Gb. 12.7 sudut yang berelasi

a. ∠XOP = α dan ∠XOP1 = 180° - α

b. *x*1 = −*x*, *y*1*= y* dan *r*1 = *r*

maka diperoleh hubungan:

* + 1. 
    2. 
    3. 

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a.  d. 

b.  e. 

c.  f. 

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan (180° + α)

*y*

*x*

X

Y

P(*x,y*)

*r*

α

(180°+α)

P1(*x*1*,y*1)

*r*1

*x*1

*y*1

O

Gb. 12.8. sudut yang berelasi

Dari gambar 12.8 titik P1(*x*1*,y*1) adalah bayangan dari titik P(*x,y*) akibat pencerminan terhadap garis *y* = −*x*, sehingga

a. ∠XOP = α dan ∠XOP1 = 180° + α

b. *x*1 = −*x*, *y*1*=* −*y* dan *r*1 = *r*

maka diperoleh hubungan:

* 1. 
  2. 
  3. 

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a.  d. 

b.  e. 

c.  f. 

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (- α)

*y*

*x*

X

Y

P(*x,y*)

*r*

α

(360°-α1)

P1(*x*1*,y*1)

*r*1

*x*1

*y*1

O

-α

Gb. 12.9. sudut yang berelasi

Dari gambar 2.10 diketahui titik P1(*x*1*,y*1) bayangan dari P(*x,y*)

akibat pencerminan terhadap sumbu *x*, sehingga

a. ∠XOP = α dan ∠XOP1 = - α

b. *x*1 = *x*, *y*1*=* −*y* dan *r*1 = *r*

maka diperoleh hubungan

* 1. 
  2. 
  3. 

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a.  d. 

b.  e. 

c.  f. 

Untuk relasi α dengan (- α) tersebut identik dengan relasi α dengan 360° − α, misalnya sin (360° − α) = − sin α.

1. **Identitas Trigonometri**

Dari gambar di samping diperoleh  , dan . Sehingga 

*y*

*x*

X

Y

*P*(*x,* *y*)

*r*

α

O

Gb. 12.10 rumus identitas

•



sin2α +cos2α = 1

Jadi

1. **Menyelesaikan Persamaan Trigonometri Sederhana**

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat perbandingan trigonometri suatu sudut, di mana sudutnya dalam ukuran derajat atau radian.

Menyelesaikan persamaan trigonometri adalah menentukan nilai *x* yang memenuhi persamaan tersebut sehingga jika dimasukkan nilainya akan menjadi benar.

1. Menyelesaikan persamaan sin *x* = sin α

Dengan mengingat rumus

sin (180° - α) = sin α dan sin (α + *k*. 360°) = sin α, maka diperoleh:

Jika sin *x* = sin α maka

*x* = α + k. 360° atau *x* = (180° − α) + *k*. 360° , *k* ∈ B

1. Menyelesaikan persamaan cos *x* = cos α

Dengan mengingat rumus

 dan cos (α + *k*. 360°) = cos α, diperoleh

Jika cos *x* = cos α maka

*x* = α + *k*. 360° atau *x* = − α + *k*. 360°, *k* ∈ B

1. Menyelesaikan persamaan tan *x* = tan α

Dengan mengingat rumus

tan (180° + α) = tan α dan tan (α + *k*. 360°) = tan α, maka diperoleh:

Jika tan *x* = tan α maka

*x* = α + *k*. 180° , *k* ∈ B

contoh:

Tentukan penyelesaian persamaanberikut ini untuk 0° ≤ *x* ≤ 360°.

* 1.  c) 
  2. 

Penyelesaian:

1.  → sin *x* = sin 30°

*x* = α + *k*. 360° untuk *k* = 0 → *x* = 30°

*x* = (180° − α) + *k*.360° untuk *k* = 0 → *x* = 180° − 30° = 150°

1.  → cos *x* = cos 30°

*x* = α + *k*. 360° untuk *k* = 0 → *x* = 30°

*x* = − α + *k*. 360° untuk *k* = 1 → *x* = − 30° + 360° = 330°

1.  → tan *x* = tan 120°

*x* = α + *k*. 180° untuk *k* = 0 → *x* = 120°

untuk *k* = 1 → *x* = 120° + 180° = 300°

**Catatan:** satuan sudut selain derajat adalah radian, di mana satu radian adalah besarnya sudut yang menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari.

∠ AOB = 1 rad

*r*

*r*

O

A

B

Hubungan radian dengan derajat

360° =  rad

= 2π rad

180° = π rad

pendekatan 1 rad = 57,3°.

Dengan mengingat pengertian radian tersebut, maka bentuk penyelesaian persamaan trigonometri dapat pula menggunakan satuan radian, sebagai contoh untuk persamaan sin *x* = sin A maka penyelesaiannya adalah:

*x* = A + k. 2π atau *x* = (π− A) + *k*. 2π , *k* ∈ B

di mana *x* dan A masing-masing satuannya radian.

1. **Rumus-rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut**
   * + 1. Rumus cos (α + β) dan cos (α − β)

α

β

α

A D E B

C

G F

Pada gambar di samping diketahui garis CD dan AF keduanya adalah garis tinggi dari segitiga ABC. Akan dicari rumus cos (α + β).

 → 

Gb. 12.11

Pada segitiga siku−siku CGF

 →  …………..(1)

Pada segitiga siku−siku AFC,

 →  …………..(2)

 →  …………..(3)

Pada segitiga siku−siku AEF,

 →  …………..(4)

Dari (1) dan (2) diperoleh

GF = AC sin α sin β

Karena DE = GF maka DE = AC sin α sin β

Dari (3) dan (4) diperoleh

AE = AC cos α cos β

Sehingga AD = AE − DE

AC cos (α + β) = AC cos α cos β − AC sin α sin β

cos (α + β) = cos α cos β − sin α sin β

Jadi

Untuk menentukan cos (α − β) gantilah β dengan −β lalu disubstitusikan ke rumus cos (α + β).

cos (α − β) = cos (α + (−β))

= cos α cos (−β) − sin α sin (−β)

= cos α cos β − sin α (−sin β)

= cos α cos β + sin α sin β

Jadi

cos (α − β) = cos α cos β + sin α sin β

* + - 1. Rumus sin (α + β) dan sin (α − β)

Untuk menentukan rumus sin (α + β) dan sin (α − β) perlu diingat rumus sebelumnya, yaitu: sin (90° − α) = cos α dan

cos (90° − α) = sin α

sin (α + β) = cos (90° − (α + β))

= cos ((90° − α) − β)

= cos (90° − α) cos β + sin (90° − α) sin β

= sin α cos β + cos α sin β

sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β

Jadi

Untuk menentukan sin (α − β), seperti rumus kosinus selisih dua sudut gantilah β dengan −β lalu disubstitusikan ke sin (α + β).

sin (α − β) = sin (α + (− β))

= sin α cos (−β) + cos α sin (−β)

= sin α cos β + cos α (−sin β)

= sin α cos β − cos α sin β

sin (α − β) = sin α cos β − cos α sin β

Jadi

* + - 1. Rumus tan (α + β) dan tan (α − β)

Dengan mengingat , maka



 



Jadi

Untuk menentukan tan (α − β), gantilah β dengan −β lalu disubstitusikan ke tan (α + β).

tan (α − β) = tan (α + (− β))









Jadi

1. **Rumus Trigonometri Sudut Rangkap**

Dari rumus−rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut, dapat dikembangkan menjadi rumus trigonometri untuk sudut rangkap.

* + - 1. sin 2α = sin (α + α) = sin α cos α + cos α sin α = 2 sinα cosα

sin 2α = 2 sinα cosα

Jadi

* + - 1. cos 2α = cos (α + α) = cos α cos α − sin α sin α = cos2α − sin2α

Jadi

cos 2α = cos2α − sin2α

Rumus−rumus variasi bentuk lain yang memuat cos 2α dapat diturunkan dengan mengingat rumus dasar cos2α + sin2α = 1.

cos 2α = cos2α − sin2α cos 2α = cos2α − sin2α

= cos2α − (1 − cos2α) = (1 − sin2α) − sin2α

= 2cos2α − 1 = 1 − 2 sin2α

1. cos 2α = cos2α − sin2α
2. cos 2α = 2cos2α − 1
3. cos 2α = 1 − 2 sin2α

Sehingga

* + - 1. 



Jadi

1. **Mengubah Rumus Perkalian ke rumus Penjumlahan/Pengurangan**
   * + 1. Dari rumus cosinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

cos (α + β) = cos α cos β − sin α sin β

cos (α − β) = cos α cos β + sin α sin β

+

cos (α + β) + cos (α − β) = 2 cos α cos β

Jadi

cos (α + β) + cos (α − β) = 2 cos α cos β

cos (α + β) = cos α cos β − sin α sin β

cos (α − β) = cos α cos β + sin α sin β

−

cos (α + β) − cos (α − β) = −2 sin α sin β

Jadi

cos (α + β) − cos (α − β) = −2 sin α sin β

* + - 1. Dari rumus sinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β

sin (α − β) = sin α cos β − cos α sin β

+

sin (α + β) + sin (α − β) = 2 sin α cos β

sin (α + β) + sin (α − β) = 2 sin α cos β

Jadi

sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β

sin (α − β) = sin α cos β − cos α sin β

−

sin (α + β) + sin (α − β) = 2 sin α cos β

Jadi

sin (α + β) − sin (α − β) = 2 cos α sin β

1. **Soal Latihan**
   * + 1. Carilah nilai dari

a. sin 120° b. tan 150° c. cot 330°

Nilai dari sin 45° cos 135° + tan 210° sec 60° = …..

* + - 1. Jika cos α = dan 0°< α < 90° maka nilai tan α adalah ……
      2. Jika α dan β sudut-sudut lancip dengan sin α =  dan sin β = , hitunglah sin (α + β)

# Daftar Pustaka

1. Cipta Science Team. 1997. *Rangkuman Matematika Untuk Siswa SMU*. Yustadi, Indonesia
2. Palouras, J.D. dan Gunawan, W. 1987. *Peubah kompleks untuk Ilmuan dan Insinyur*. Erlangga. Jakarta
3. Stroud, K.A. dan Edwin, S. 1989. *Matematika Untuk Teknik.* Ed. Ke-3. Erlangga Jakarta.
4. Tampomas, H. 1999 *Seribu Pena Matematika SMU Kelas 3.* Erlangga, Jakarta